

VITESSE DE CONVERGENCE DANS LE THÉORÈME LIMITE CENTRAL POUR CHAÎNES DE MARKOV DE PROBABILITÉ DE TRANSITION QUASI-COMPACTE.

HERVÉ LOÏC
I.R.M.A.R., UMR-CNRS 6625,
Institut National des Sciences Appliquées de Rennes,
20, Avenue des Buttes de Couësmes CS 14 315, 35043 Rennes Cedex.
Loic.Herve@insa-rennes.fr

Résumé. Soit Q une probabilité de transition sur un espace mesurable E , admettant une probabilité invariante, soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov associée à Q , et enfin soit ξ une fonction réelle mesurable sur E , et $S_n = \sum_{k=1}^n \xi(X_k)$. Sous des hypothèses fonctionnelles sur l'action de Q et de ses noyaux de Fourier $Q(t)$, nous étudions la vitesse de convergence dans le théorème limite central pour la suite $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})_n$. Selon les hypothèses nous obtenons une vitesse en $n^{-\frac{\tau}{2}}$ pour tout $\tau < 1$, ou bien en $n^{-\frac{1}{2}}$. Nous appliquons la méthode spectrale de Nagaev en l'améliorant, d'une part grâce à un théorème de perturbations de Keller et Liverani, d'autre part grâce à une majoration de $\mathbb{E}[e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}] - e^{\frac{-t^2}{2}}$ obtenue par une méthode de réduction en différence de martingale. Lorsque E est non compact ou ξ est non bornée, les conditions requises ici sur $Q(t)$ (en substance, des conditions de moment sur ξ) sont plus faibles que celles habituellement imposées lorsqu'on utilise le théorème de perturbation standard. Par exemple, dans le cadre des chaînes V -géométriquement ergodiques ou des modèles itératifs Lipschitziens, on obtient dans le t.l.c une vitesse en $n^{-\frac{1}{2}}$ sous une hypothèse de moment d'ordre 3 sur ξ .

Abstract. Let Q be a transition probability on a measurable space E which admits an invariant probability measure, let $(X_n)_n$ be a Markov chain associated to Q , and let ξ be a real-valued measurable function on E , and $S_n = \sum_{k=1}^n \xi(X_k)$. Under functional hypotheses on the action of Q and its Fourier kernels $Q(t)$, we investigate the rate of convergence in the central limit theorem for the sequence $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})_n$. According to the hypotheses, we prove that the rate is, either $O(n^{-\frac{\tau}{2}})$ for all $\tau < 1$, or $O(n^{-\frac{1}{2}})$. We apply the spectral method of Nagaev which is improved by using a perturbation theorem of Keller and Liverani, and a majoration of $\mathbb{E}[e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}] - e^{\frac{-t^2}{2}}$ obtained by a method of martingale difference reduction. When E is not compact or ξ is not bounded, the conditions required here on $Q(t)$ (in substance, some moment conditions on ξ) are weaker than the ones usually imposed when the standard perturbation theorem is used in the spectral method. For example, in the case of V -geometric ergodic chains or Lipschitz iterative models, the rate of convergence in the c.l.t is $O(n^{-\frac{1}{2}})$ under a third moment condition on ξ .

AMS subject classification : 60J05-60F05

Keywords : Markov chains, rate of convergence in central limit theorem, spectral method.

I. INTRODUCTION

Dans ce papier on désigne par (E, \mathcal{E}) un espace mesurable, par Q une probabilité de transition sur (E, \mathcal{E}) admettant une probabilité invariante, notée ν , par $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur (E, \mathcal{E}) associée à Q , et enfin par ξ une fonction ν -intégrable de E dans \mathbb{R} telle que

$$\nu(\xi) = 0. \text{ On pose } S_n = \sum_{k=1}^n \xi(X_k).$$

L'objet de ce travail est d'étudier la vitesse de convergence dans le théorème limite central (t.l.c) pour la suite de variables aléatoires $(\xi(X_n))_{n \geq 0}$. La méthode que nous utilisons s'inspire des techniques de perturbations d'opérateurs qui ont été introduites par Nagaev [22] [23] et largement appliquées depuis. On trouvera dans [12] un exposé général de cette méthode et de nombreuses références (voir également la remarque consécutive au théorème II).

Les hypothèses porteront sur le noyau Q et les noyaux de Fourier $Q(t)$ associés à Q et ξ ; en substance, on supposera que, sur un certain espace de Banach, Q vérifie une hypothèse de quasi-compacité et que $Q(t)$ satisfait aux conditions du théorème de perturbations d'opérateurs de Keller-Liverani [18]. Comme il apparaît déjà dans [13] (dans le cadre des modèles itératifs) et dans [14] (en vue d'obtenir un théorème local), le théorème de Keller-Liverani remplace avantageusement les énoncés classiques de perturbations d'opérateurs, notamment lorsque l'espace d'états E est non compact ou que ξ est non bornée. Ainsi, dans [13] et [14], nous avons pu établir des théorèmes limites sous des hypothèses de moments polynomiaux là où habituellement étaient requis des moments exponentiels.

Les résultats de vitesse de convergence dans le t.l.c sont présentés au paragraphe II. On appliquera ensuite (§ III) ces résultats dans le cadre des chaînes V -géométriquement ergodiques et des modèles itératifs Lipschitziens.

Pour illustrer les résultats obtenus, considérons l'exemple classique sur \mathbb{R}^d des processus autorégressifs $X_n = A_n X_{n-1} + b_n$ sous les hypothèses suivantes : A_1 est presque-sûrement une contraction stricte et $\mathbb{E}[\|b_1\|^3] < +\infty$. Alors, si X_0 a un moment d'ordre 2 et si ξ est uniformément lipschitzienne sur \mathbb{R}^d (par exemple si $\xi(x) = \|x\|$), la vitesse de convergence dans le t.l.c. est en $n^{-\frac{1}{2}}$ (cf. Cor. III.2'). La condition de moment d'ordre 3 sur b_1 est la condition attendue en référence au théorème de Berry-Esseen pour v.a.i.i.d.

Notations. Si X et Y sont des espaces de Banach, on désigne par X' le dual topologique de X , par $\mathcal{L}(X)$ l'espace des endomorphismes continus de X , et par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y . Ces espaces sont munis des normes subordonnées. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité sur $X' \times X$.

Pour $p \geq 1$ on note $\mathbb{L}^p(\nu)$ l'espace de Lebesgue usuel associé à ν . On note $\mathbf{1} = 1_E$ la fonction identiquement égale à 1 sur E .

La probabilité initiale de la chaîne sera appelée μ_0 . La loi normale centrée, de variance σ^2 , est notée $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Enfin les noyaux de Fourier associés à Q et ξ sont définis par

$$t \in \mathbb{R}, x \in E, \quad Q(t)(x, dy) = e^{it\xi(y)} Q(x, dy).$$

II. HYPOTHÈSES ET ÉNONCÉS DES RÉSULTATS

Rappelons que ν désigne une probabilité Q -invariante. Les espaces de Banach sur lesquels on fera opérer Q sont composés de fonctions mesurables de E dans \mathbb{C} . Étant donné un tel espace $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$, nous dirons que Q est \mathcal{B} -géométriquement ergodique si :

$\mathbf{1} \in \mathcal{B}$, $\nu \in \mathcal{B}'$, $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, et il existe $\kappa_0 < 1$, $C \geq 0$ tels que

$$\forall n \geq 1, \quad \forall f \in \mathcal{B}, \quad \|Q^n f - \nu(f)\mathbf{1}\| \leq C \kappa_0^n \|f\|.$$

Sous cette condition, si $\xi \in \mathcal{B}$, alors la série $\sum_{n \geq 0} Q^n \xi$ converge absolument dans \mathcal{B} car $\nu(\xi) = 0$. Dans ce cas on pose $\check{\xi} = \sum_{n=0}^{+\infty} Q^n \xi$, et si en outre $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}^2(\nu)$, on note

$$\sigma^2 = \nu(\check{\xi}^2) - \nu((Q\check{\xi})^2), \quad \text{et} \quad \psi = Q(\check{\xi}^2) - (Q\check{\xi})^2 - \sigma^2 \mathbf{1}.$$

Hypothèse (\mathcal{H}) . Il existe un espace de Banach $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ tel que $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}^3(\nu)$, $\xi \in \mathcal{B}$, et vérifiant en outre les conditions suivantes :

(H1) Q est \mathcal{B} -géométriquement ergodique.

(H2) On a $\sum_{p=0}^{+\infty} \nu(|Q^p \psi|^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} < +\infty$.

(H3) On a $\sup \left\{ \nu(|e^{it\xi} - 1| |f|), f \in \mathcal{B}, \|f\| \leq 1 \right\} = O(|t|)$ quand $t \rightarrow 0$.

(H4) Il existe un intervalle ouvert I contenant $t = 0$ tel que, pour $t \in I$, on ait $Q(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, et il existe des constantes $\kappa < 1$, $C \geq 0$ tels que

$$\forall n \geq 1, \quad \forall t \in I, \quad \forall f \in \mathcal{B}, \quad \|Q(t)^n f\| \leq C \kappa^n \|f\| + C \nu(|f|),$$

et enfin le rayon spectral essentiel de $Q(t)$ opérant sur \mathcal{B} est \leq au réel κ .

On observera que la seule condition de moment sur ξ est $\nu(|\xi|^3) < +\infty$.

Théorème I. Supposons que $\mu_0 = \nu$ et $\sigma^2 > 0$. Sous l'hypothèse (\mathcal{H}) , la suite $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec une vitesse de convergence au moins en $n^{-\frac{\tau}{2}}$ pour tout $\tau < 1$,

$$\text{à savoir : } \forall \tau < 1, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \mathcal{N}(0, 1)(]-\infty, x]) \right| = O(n^{-\frac{\tau}{2}}).$$

Hypothèse $(\tilde{\mathcal{H}})$. Le couple (Q, \mathcal{B}) vérifie les hypothèses (\mathcal{H}) , \mathcal{B} est contenu dans un espace de Banach $(\tilde{\mathcal{B}}, \|\cdot\|_{\sim})$ qui s'envoie continûment dans $\mathbb{L}^1(\nu)$, Q est $\tilde{\mathcal{B}}$ -géométriquement ergodique, et enfin $\sup \left\{ \|Q(t)f - Qf\|_{\sim}, f \in \mathcal{B}, \|f\| \leq 1 \right\} = O(|t|)$ quand $t \rightarrow 0$.

Théorème II. Supposons que l'hypothèse $(\tilde{\mathcal{H}})$ soit satisfaite, et que $\sigma^2 > 0$ et $\mu_0 \in \mathcal{B}' \cap \tilde{\mathcal{B}}'$. Alors la vitesse de convergence dans le t.l.c est en $n^{-\frac{1}{2}}$.

Sous la condition (H1), si $t \mapsto Q(t)$ est de classe \mathcal{C}^3 de I dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, le théorème de perturbations standard permet d'établir une vitesse en $n^{-\frac{1}{2}}$ dans le t.l.c. [9]. La condition de régularité ci-dessus est par exemple vérifiée lorsque \mathcal{B} est une algèbre de Banach (en général dans ce cas E est compact) et que $\xi \in \mathcal{B}$; en effet $t \mapsto Q(t)$ est alors analytique.

Remarques.

1. La condition (H1) est équivalente au fait que Q est quasi-compact sur \mathcal{B} , avec 1 comme valeur propre simple et dominante.

2. Supposons que Q soit \mathcal{B} -géométriquement ergodique et que $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}^3(\nu)$, $\xi \in \mathcal{B}$. Soit $(\mathcal{B}_2, \|\cdot\|_2)$ un espace de Banach contenant les fonctions g^2 , $g \in \mathcal{B}$. S'il existe $A > 0$ tel que l'on ait, pour $f \in \mathcal{B}_2$, $\nu(|f|^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} \leq A\|f\|_2$, et si Q est \mathcal{B}_2 -géométriquement ergodique, alors on a (H2). En effet ξ , $Q\xi$ et $\mathbf{1}$ sont dans \mathcal{B} , donc $\psi \in \mathcal{B}_2$. Par définition du nombre σ^2 et par invariance de ν , on a $\nu(\psi) = 0$, par conséquent $\sum_{n \geq 0} \|Q^n \psi\|_2 < +\infty$, et (H2) en découle.

3. Soit $(\mathcal{B}_\gamma)_{0 < \gamma \leq \gamma_0}$ une famille d'espaces de Banach, croissante pour l'inclusion. Les énoncés I-II sont particulièrement bien adaptés lorsque, pour tout $\gamma \in]0, \gamma_0]$, Q est \mathcal{B}_γ -géométriquement ergodique et que $Q(t)$ vérifie (H3)-(H4) sur \mathcal{B}_γ pour $|t|$ petit. Dans ce cas la principale difficulté réside dans le choix de paramètres $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$ tels que, si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\gamma_1}$, alors Q vérifie sur $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_{\gamma_2}$ les conditions de la remarque 2 (afin d'obtenir (H2)), et vérifie $(\tilde{\mathcal{H}})$ avec $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{\gamma_3}$. Les exemples du paragraphe III font intervenir de telles familles d'espaces.

4. Si, pour $t \in I$, l'inégalité de (H4) est satisfaite et si l'ensemble $Q(t)(\{\|f\| \leq 1, f \in \mathcal{B}\})$ est relativement compact dans $(\mathcal{B}, \nu(|\cdot|))$, alors $Q(t)$ est quasi-compact à itérés bornés sur \mathcal{B} [16], et la propriété dans (H4) sur le rayon spectral essentiel de $Q(t)$ est alors automatiquement satisfaite [10]. Cette remarque appliquée avec $t = 0$ permet dans certain cas d'établir (H1) lorsque P vérifie en outre des hypothèses d'irréductibilité et d'apériodicité garantissant que 1 est une valeur propre simple et l'unique valeur propre de module 1 de Q .

5. Si $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$, alors l'hypothèse $(\tilde{\mathcal{H}})$ se réduit à (\mathcal{H}) et $\|Q(t) - Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} = O(|t|)$. Cependant cette dernière condition est rarement satisfaite lorsque ξ est non bornée, voir § II.

6. Une vitesse de convergence en $n^{-\frac{\tau}{4}}$ pour tout $\tau < 1$ a été établie dans [4] pour des chaînes de Markov stationnaires, à espace d'états compact, associées à un opérateur de transfert markovien. Dans [4] il n'est pas supposé que Q a une action quasi-compacte, et les conditions sur ξ sont assez faibles. Mentionnons que la fonction ψ introduite au début du paragraphe est déjà utilisée dans les arguments de [4].

7. Grâce à (H1), la condition $\xi \in \mathcal{B}$ est commode pour définir $\check{\xi}$, et la condition $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}^3(\nu)$ assure alors que $\check{\xi} \in \mathbb{L}^3(\nu)$. Cette dernière propriété n'est utilisée qu'au § IV.1.

Si $\xi \notin \mathcal{B}$, les théorèmes I-II subsistent, à condition de renforcer la condition (H2) comme suit : la série $\sum_{n \geq 0} Q^n \xi$ converge dans $\mathbb{L}^3(\nu)$, et la fonction ψ , que l'on peut alors définir comme au début du paragraphe, vérifie $\sum_{p=0}^{+\infty} \nu(|Q^p \psi|^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} < +\infty$.

La preuve des théorèmes I- II est présentée au § IV. La méthode, fondée sur des techniques de perturbations d'opérateurs introduites par Nagaev [22] [23], est proche de celle utilisée dans [14]. Plus précisément, on appliquera dans un premier temps une méthode de réduction

en différence de martigale pour établir que $\sup_{|t| \leq \sqrt{n}} |t|^{-1} |\mathbb{E}[e^{it \frac{S_n}{\sigma \sqrt{n}}}] - e^{\frac{-t^2}{2}}| = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Cette majoration, obtenue en s'inspirant de [17], permettra alors d'écrire un développement limité de la valeur propre dominante perturbée de $Q(t)$ fournie par [18]. On appliquera alors les techniques usuelles de transformée de Fourier.

III. EXEMPLES

Dans les deux exemples traités dans ce paragraphe, on désigne par (E, d) un espace métrique non compact tel que toute boule fermée de E soit compacte. On munit E de sa tribu borélienne \mathcal{E} , et l'on note x_0 un point quelconque de E .

III.1. Application aux chaînes V -géométriquement ergodiques.

Soit V une fonction mesurable de E dans $[1, +\infty[$ telle que $V(x) \rightarrow +\infty$ quand $d(x, x_0) \rightarrow +\infty$, et soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne V -géométriquement ergodique [20] (chap. 16), à savoir : il existe une probabilité Q -invariante, ν , telle que $\nu(V) < +\infty$, et Q est \mathcal{B}_V -géométriquement ergodique, où \mathcal{B}_V est l'espace des fonctions mesurables sur E , à valeurs complexes, vérifiant

$$\|f\|_V = \sup\{V(x)^{-1}|f(x)|, x \in E\} < +\infty.$$

Si ξ^2 est dominée par un multiple de V , alors $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ [20].

Corollaire III.1. *Si $|\xi|^3$ est dominée par un multiple de V , si $\sigma^2 > 0$ et si $\mathbb{E}[V(X_0)] < +\infty$, alors $(\xi(X_n))_{n \geq 0}$ vérifie le t.l.c avec une vitesse en $n^{-\frac{1}{2}}$.*

Dans le cas stationnaire et pour $V = \mathbf{1}$, nous retrouvons la vitesse en $n^{-\frac{1}{2}}$ fournie par le théorème de Bolthausen [3] (les conditions de [3] sur les coefficients de mélange sont clairement satisfaites lorsque $V = \mathbf{1}$). Dans le cadre spécifique des chaînes V -géométriquement ergodiques, une vitesse en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est obtenue dans [19] sous la condition assez restrictive que ξ est bornée. Dans [7] la vitesse, exprimée en termes d'inégalités de Paley, est présentée dans le cas stationnaire sous des conditions de moment assez fortes. Enfin [24] établit une vitesse en $(\frac{\ln n}{n})^\beta$ lorsque ξ est dominée par un multiple de V^α ($0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$), avec $\beta = \frac{1}{2(\alpha+1)}$. Ainsi le corollaire III.1 améliore les résultats des travaux précédemment cités. En outre, comme $\nu(V) < +\infty$, la condition que $|\xi|^3$ est dominée par un multiple de V est proche de celle requise dans le théorème de Berry-Esseen puisqu'elle exprime d'une certaine façon que ξ admet un moment d'ordre 3. Mentionnons enfin que, grâce à la méthode spectrale et au théorème de Keller-Liverani, des théorèmes limites local et de renouvellement ont été établis dans [15] lorsque ξ est non-arithmétique et dominée par un multiple de $V^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$).

Preuve du corollaire III.1. Soit $W = V^{\frac{1}{3}}$, $U = V^{\frac{2}{3}}$, et soient \mathcal{B}_W , \mathcal{B}_U les espaces obtenus comme ci-dessus en remplaçant V respectivement par W et U . Notons que $\nu \in \mathcal{B}'_W$ car $\nu(W) < +\infty$, que $\xi \in \mathcal{B}_W$, et enfin que \mathcal{B}_W s'envoie continûment dans $\mathbb{L}^3(\nu)$ car $\nu(W^3) = \nu(V) < +\infty$. Nous allons montrer que Q vérifie l'hypothèse $(\tilde{\mathcal{H}})$ avec $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W$, $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_V$. Comme Q est V -géométriquement ergodique par hypothèse, il l'est également relativement à W , voir [20] (Lem. 15.2.9 et Th. 16.0.1). D'où (H1). Pour les mêmes raisons Q est U -géométriquement ergodique. En outre \mathcal{B}_U s'envoie continûment dans $L^{\frac{3}{2}}(\nu)$ car $\nu(U^{\frac{3}{2}}) = \nu(V) < +\infty$. D'où (H2) (cf. Rq. 2 avec $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_U$).

On a clairement $Q(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_W)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme \mathcal{B}_W s'envoie continûment dans $\mathbb{L}^3(\nu)$, l'inégalité de Hölder implique (H3). La propriété (H4), plus difficile à établir, résulte d'un travail récent de Hennion [11], voir [15]. Enfin si $f \in \mathcal{B}_W$, alors

$$|Q(t)f - Qf| \leq Q\left(|e^{it\xi} - 1| |f|\right) \leq |t| Q(|\xi|W) \|f\|_W \leq |t| \|\xi\|_W Q(W^2) \|f\|_W,$$

d'où $\|Q(t)f - Qf\|_V \leq |t| \|\xi\|_W \|QW^2\|_V \|f\|_W$. Ce qui précède prouve $(\tilde{\mathcal{H}})$. Comme par hypothèse $\mu_0(V) < +\infty$, on a $\mu_0 \in \mathcal{B}'_W \cap \mathcal{B}'_V$, et le corollaire découle du théorème II. \square

III.2. Application aux Modèles itératifs Lipschitziens.

On désigne par G un semi-groupe de transformations lipschitziennes de E , et par \mathcal{G} une tribu sur G . On suppose que l'action de G sur E est mesurable. Pour $g \in G$, on pose

$$c(g) = \sup \left\{ \frac{d(gx, gy)}{d(x, y)}, x, y \in E, x \neq y \right\}.$$

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans G . On note π leur loi commune. Étant donnée une variable aléatoire X_0 à valeurs dans E , indépendante de $(Y_n)_n$, de loi μ_0 , on considère la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ définie pour $n \geq 1$ par $X_n = Y_n X_{n-1}$.

Alors $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition $(Qf)(x) = \int_G f(gx) d\pi(g)$.

On suppose dans ce paragraphe qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que l'on ait

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\xi(x) - \xi(y)| \leq C d(x, y).$$

Sous les hypothèses $\int_G c(g)^2 d\pi(g) < 1$ et $\int_G d(gx_0, x_0)^2 d\pi(g) < +\infty$, la suite $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})_n$ converge en loi vers une gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, voir [2].

Soit $\Gamma(g) = 1 + c(g) + d(gx_0, x_0)$. On renforce ici la condition précédente en supposant qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que

$$(*) \quad \int_G \Gamma(g)^3 (1 + c(g)^{\frac{1}{2}}) d\pi(g) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_G c(g)^{\frac{1}{2}} \max\{c(g), 1\}^3 d\pi^{*n_0}(g) < 1,$$

où l'on a désigné par π^{*n_0} la loi de $Y_{n_0} \cdots Y_1$.

Sous ces hypothèses, on sait qu'il existe une unique probabilité Q -invariante, ν , et que $\nu(d(\cdot, x_0)^3) < +\infty$ (appliquer le Th. I de [13] avec la distance $d(x, y)^{\frac{1}{2}}$).

Corollaire III.2. *Sous l'hypothèse (*), si $\sigma^2 > 0$ et $\mathbb{E}[d(X_0, x_0)^2] < +\infty$, alors $(\xi(X_n))_{n \geq 0}$ vérifie le t.l.c avec une vitesse en $n^{-\frac{1}{2}}$.*

Le cadre ci-dessus contient celui des modèles itératifs [6], en particulier celui des processus autorégressifs définis par une v.a X_0 à valeurs dans \mathbb{R}^d , puis par $X_n = A_n X_{n-1} + b_n$ ($n \geq 1$), où $(A_n, b_n)_{n \geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$, indépendante de X_0 ; on a noté $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées d'ordre d .

Dans ce contexte une vitesse en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ dans le t.l.c a été établie dans [21] lorsque A_1 est presque-sûrement une contraction stricte et que b_1 vérifie une condition de moment exponentiel. Dans [5] une vitesse en $n^{-\frac{\tau}{2}}$ ($\tau < 1$) est obtenue pour une large classe de fonctions ξ , sous la même condition sur A_1 et sous l'hypothèse $\mathbb{E}[\|b_1\|^p] < +\infty$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Les résultats de [21] ont été étendus dans [13] sous une condition de contraction en moyenne sur $\|A_1\|$ et sous la condition de moment $\mathbb{E}[\|b_1\|^{8+\varepsilon}] < +\infty$ ($\varepsilon > 0$), où $\|\cdot\|$ désigne indifféremment une norme de \mathbb{R}^d et la norme subordonnée associée sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Du corollaire III.2 nous déduisons par exemple le résultat suivant.

Corollaire III.2'. *Si $\|A_1\| < 1$ presque sûrement, si $\mathbb{E}[\|b_1\|^3] < +\infty$ et $\mathbb{E}[\|X_0\|^2] < +\infty$, alors $(\xi(X_n))_{n \geq 0}$ vérifie le t.l.c avec une vitesse en $n^{-\frac{1}{2}}$ (sous réserve que $\sigma^2 > 0$).*

Preuve du corollaire III.2. Soit $\lambda \in]0, 1]$ quelconque, soit $p_\lambda(x) = 1 + \lambda d(x, x_0)^{\frac{1}{2}}$ (le réel λ sera choisi ultérieurement), et pour $\gamma > 0$, soit \mathcal{L}_γ l'espace de Banach des fonctions f de E dans \mathbb{C} telles que

$$m_\gamma(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^{\frac{1}{2}} p_\lambda(x)^\gamma p_\lambda(y)^\gamma}, x, y \in E, x \neq y \right\} < +\infty,$$

muni de la norme $\|f\|_\gamma = m_\gamma(f) + |f|_\gamma$, où l'on a posé $|f|_\gamma = \sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{p_\lambda(x)^{\gamma+1}} < +\infty$.

On a clairement $\xi \in \mathcal{L}_1$, et si $f \in \mathcal{L}_1$, alors $\nu(|f|^3)^{\frac{1}{3}} \leq |f|_1 \nu(p_\lambda^6)^{\frac{1}{3}}$, avec $\nu(p_\lambda^6) < +\infty$. Donc \mathcal{L}_1 s'envoie continûment dans $\mathcal{L}^3(\nu)$.

Lemme III.1. *On a (H1) avec $\mathcal{B} = \mathcal{L}_1$, et (H2).*

Preuve. On a $\nu \in \mathcal{L}'_1 \cap \mathcal{L}'_3$ car $\nu(p_\lambda^4) < +\infty$. En choisissant λ suffisamment petit, l'ergodicité géométrique de Q relativement à $\mathcal{B} = \mathcal{L}_1$, puis à \mathcal{L}_3 , résulte des conditions (*) et de [13] (Th. 5.5 appliqué avec la distance $d(x, y)^{\frac{1}{2}}$)¹. En outre si $f \in \mathcal{L}_3$, alors $\nu(|f|^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \leq |f|_3 \nu(p_\lambda^6)^{\frac{2}{3}} \leq \|f\|_3 \nu(p_\lambda^6)^{\frac{2}{3}}$, et \mathcal{L}_3 contient les fonctions g^2 , $g \in \mathcal{L}_1$. D'où (H2) (cf. Rq. 2 avec $\mathcal{B}_2 = \mathcal{L}_3$). \square

Lemme III.2. *La condition (H3) est satisfaite, $Q(t)$ est un endomorphisme continu de \mathcal{L}_1 pour tout $t \in \mathbb{R}$, et enfin on a (H4) pour $|t|$ petit.*

Preuve. Comme \mathcal{L}_1 s'envoie continûment dans $\mathcal{L}^3(\nu)$, (H3) résulte de l'inégalité de Hölder. On pose $\delta_\lambda(g) = \max\{c(g), 1\}^{\frac{1}{2}} + \lambda d(gx_0, x_0)^{\frac{1}{2}}$. On a $\sup_{x \in E} \frac{p_\lambda(gx)}{p_\lambda(x)} \leq \delta_\lambda(g)$ et $\delta_\lambda(g)^2 \leq 2\Gamma(g)$. Soit $f \in \mathcal{L}_1$. De la définition de $c(g)$ et de l'inégalité $|e^{ia} - e^{ib}| \leq 2|b - a|^{\frac{1}{2}}$ ($a, b \in \mathbb{R}$), on obtient en posant $A = \pi(c^{\frac{1}{2}}\delta_\lambda^2)$

$$\begin{aligned} |(Q(t)f)(x) - (Q(t)f)(y)| &\leq \int |f(gx) - f(gy)| d\pi(g) + \int |f(gy)| |e^{it\xi(gx)} - e^{it\xi(gy)}| d\pi(g) \\ &\leq A m_1(f) d(x, y)^{\frac{1}{2}} p_\lambda(x) p_\lambda(y) + 2AC^{\frac{1}{2}} |t|^{\frac{1}{2}} |f|_1 d(x, y)^{\frac{1}{2}} p_\lambda(y)^2. \end{aligned}$$

¹À cet effet le réel λ doit être fixé tel que $\pi(c^{\frac{1}{2}}\delta_\lambda^6) < 1$, où $\delta_\lambda(g) = \max\{c(g), 1\}^{\frac{1}{2}} + \lambda d(gx_0, x_0)^{\frac{1}{2}}$, ce qui est possible grâce aux conditions (*) et au théorème de convergence dominée.

On peut évidemment supposer que $d(y, x_0) \leq d(x, x_0)$ (sinon, inverser le rôle joué par x et y), de sorte que $p_\lambda(y)^2 \leq p_\lambda(x)p_\lambda(y)$, et il vient que $Q(t)f \in \mathcal{L}_1$, avec

$$m_1(Q(t)f) \leq A m_1(f) + 2AC^{\frac{1}{2}} |t|^{\frac{1}{2}} |f|_1.$$

On a clairement $|Q(t)f|_1 \leq |f|_1 \pi(\delta_\lambda^2)$, de sorte que $Q(t)$ a une action continue sur \mathcal{L}_1 . Pour établir l'inégalité de (H4), on utilise le fait que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\nu = m_1(\cdot) + \nu(|\cdot|)$ sont équivalentes [13] (Sect. 5). Alors, d'après l'inégalité ci-dessus, il existe une constante $D > 0$ telle que

$$m_1(Q(t)f) \leq A m_1(f) + D|t|^{\frac{1}{2}} [m_1(f) + \nu(|f|)] = (A + D|t|^{\frac{1}{2}}) m_1(f) + D|t|^{\frac{1}{2}} \nu(|f|).$$

On a $\nu(|Q(t)f|) \leq \nu(Q|f|) = \nu(|f|)$. Donc $\|Q(t)f\|_\nu \leq (A + D|t|^{\frac{1}{2}}) \|f\|_\nu + (D|t|^{\frac{1}{2}} + 1) \nu(|f|)$. Le réel λ fixé dans la preuve du lemme III.1 est tel que $A = \pi(c^{\frac{1}{2}}\delta_\lambda^2) < 1$. Soit alors t_0 tel que $\kappa = A + D|t_0|^{\frac{1}{2}} < 1$, soit $C' = D|t_0|^{\frac{1}{2}} + 1$, et soit t tel que $|t| \leq t_0$. Comme $\nu(|Q(t)f|) \leq \nu(Q|f|) = \nu(|f|)$, il résulte d'une récurrence évidente que $\|Q(t)^n f\|_\nu \leq \kappa^n \|f\|_\nu + \frac{C'}{1-\kappa} \nu(|f|)$, ce qui prouve l'inégalité de (H4).

Il reste à établir dans (H4) la propriété relative au rayon spectral essentiel de $Q(t)$. On a $\nu(|Q(t)^n f|) \leq \nu(Q^n |f|) = \nu(|f|)$, et la boule unité de $(\mathcal{L}_1, \|\cdot\|_\nu)$ est relativement compacte dans $(\mathcal{L}_1, \nu(|\cdot|))$ (utiliser le théorème d'Ascoli et le théorème de Lebesgue). La propriété souhaitée résulte alors de l'inégalité de (H4) et de [10]. \square

Ce qui précède montre que (Q, \mathcal{L}_1) vérifie (\mathcal{H}) . Démontrons maintenant que Q vérifie $(\tilde{\mathcal{H}})$ avec $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{L}_3$. On a déjà vu que Q est \mathcal{L}_3 -géométriquement ergodique. En outre on a :

Lemme III.3. *Il existe $E > 0$ tel que, pour $f \in \mathcal{L}_1$, $t \in \mathbb{R}$, on ait $\|Q(t)f - Qf\|_3 \leq E|t| \|f\|_1$.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{L}_1$. Il existe $D > 0$ tel que $\xi \leq D p_\lambda^2$. D'où

$$|(Q(t)f)(x) - Qf(x)| \leq \int |e^{it\xi(gx)} - 1| |f(gx)| d\pi(g) \leq D |f|_1 |t| p_\lambda(x)^4 \pi(\delta_\lambda^4),$$

donc $|Q(t)f - Qf|_3 \leq D |f|_1 |t| \pi(\delta_\lambda^4)$. En outre, en posant $\tilde{A} = \pi(c^{\frac{1}{2}}\delta_\lambda^4)$, $\tilde{B} = \pi(c\delta_\lambda^2)$, on a

$$\begin{aligned} & \left| [(Q(t)f)(x) - Qf(x)] - [(Q(t)f)(y) - Qf(y)] \right| \\ & \leq \tilde{A} D m_1(f) |t| d(x, y)^{\frac{1}{2}} p_\lambda(x)^3 p_\lambda(y) + \tilde{B} C |t| |f|_1 d(x, y) p_\lambda(y)^2. \end{aligned}$$

On a $p_\lambda(y) \leq p_\lambda(y)^3$ et $d(x, y)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\lambda} (p_\lambda(x) + p_\lambda(y)) \leq \frac{2}{\lambda} p_\lambda(x) p_\lambda(y) \leq \frac{2}{\lambda} p_\lambda(x)^3 p_\lambda(y)$, par conséquent $m_3(Q(t)f - Qf) \leq (\tilde{A} D m_1(f) + \frac{2}{\lambda} \tilde{B} C |f|_1) |t|$. \square

Comme $\mu_0(p_\lambda^4) < +\infty$ par hypothèse, on a $\mu_0 \in \mathcal{L}'_1 \cap \mathcal{L}'_3$, et le corollaire III.2 résulte du théorème II. \square

IV. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

IV.1. Une inégalité sur les fonctions caractéristiques

On suppose dans ce paragraphe que X_0 suit la loi ν , que les conditions (H1)-(H2) sont satisfaites, et enfin que $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}^3(\nu)$, $\xi \in \mathcal{B}$. Les éléments ξ , σ^2 et ψ ont été définis au début du paragraphe II, et pour $n \geq 1$ on pose

$$U_n = \check{\xi}(X_n) - Q\check{\xi}(X_{n-1}) \quad \text{et} \quad T_n = U_1 + \dots + U_n.$$

Proposition IV.1. *Si $\sigma^2 > 0$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \quad \left| \mathbb{E}[e^{it \frac{T_n}{\sigma\sqrt{n}}}] - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq C \frac{|t|}{\sqrt{n}}.$$

Admettons pour le moment cette proposition. En utilisant la méthode de Gordin [8], nous allons en déduire le résultat suivant.

Corollaire IV.1. *Si $\sigma^2 > 0$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \quad \left| \mathbb{E}[e^{it \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}] - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq C \frac{|t|}{\sqrt{n}}.$$

Preuve du corollaire. Soit $V_n = Q\check{\xi}(X_0) - Q\check{\xi}(X_n)$. Grâce à l'équation de Poisson $\check{\xi} - Q\check{\xi} = \xi$, on obtient que $S_n = T_n + V_n$. Par ailleurs, de la stationnarité de $(X_n)_n$ et du fait que $\check{\xi} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{L}^1(\nu)$, il vient que $\sup_n \mathbb{E}[|V_n|] < +\infty$. Enfin on a

$$\left| \mathbb{E}[e^{it \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}] - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = \left| \mathbb{E}[e^{it \frac{T_n}{\sigma\sqrt{n}}} e^{it \frac{V_n}{\sigma\sqrt{n}}}] - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq \left| \mathbb{E}[e^{it \frac{T_n}{\sigma\sqrt{n}}}] - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| + \mathbb{E}[|e^{it \frac{V_n}{\sigma\sqrt{n}}} - 1|],$$

avec $\mathbb{E}[|e^{it \frac{V_n}{\sigma\sqrt{n}}} - 1|] \leq \frac{1}{\sigma} \frac{|t|}{\sqrt{n}} \sup_n \mathbb{E}[|V_n|]$. On conclut alors grâce à la proposition. \square

Preuve de la proposition. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ pour $n \geq 0$. Il est facile de voir que $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite stationnaire d'accroissements de martingale relativement à $(\mathcal{F}_n)_n$, telle que $\mathbb{E}[|U_1|^3] < +\infty$ car $\check{\xi} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{L}^3(\nu)$.

Pour simplifier nous considérons le cas $\sigma^2 = 1$, et nous adaptons au cadre markovien les majorations présentées dans la preuve du théorème 6 de [17] [pp. 41-44]. À cet effet on pose $T_0 = 0$, $W_n = U_n^2 - 1$ pour $n \geq 1$, et l'on rappelle que $e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} + u(ix)$, avec $|u(ix)| \leq \frac{|x|^3}{6}$.

En écrivant $\mathbb{E}[e^{i\lambda T_n}] = \mathbb{E}[e^{i\lambda T_{n-1}} e^{i\lambda U_n}]$, puis en appliquant la remarque précédente avec $x = \lambda U_n$, et enfin en observant que $\mathbb{E}[e^{i\lambda T_{n-1}} U_n] = \mathbb{E}[e^{i\lambda T_{n-1}} \mathbb{E}[U_n | \mathcal{F}_{n-1}]] = 0$, il est facile de voir par récurrence que pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$

$$\mathbb{E}[e^{it \frac{T_n}{\sqrt{n}}}] - e^{-\frac{t^2}{2}} = A_n(t) + B_n(t) + C_n(t) \quad \text{avec}$$

$$A_n(t) = (1 - \frac{t^2}{2n})^n - e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \text{puis} \quad B_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{t^2}{2n})^k \mathbb{E}\left[e^{it \frac{T_{n-k-1}}{\sqrt{n}}} u\left(i \frac{t}{\sqrt{n}} U_{n-k}\right)\right],$$

$$\text{et enfin } C_n(t) = -\frac{t^2}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^k \mathbb{E} \left[e^{i \frac{t}{\sqrt{n}} T_{n-k-1}} W_{n-k} \right].$$

Soit $t \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$. On a

$$-A_n(t) \leq e^{-\frac{t^2}{2}} - e^{n(-\frac{t^2}{2n} - \frac{3t^4}{8n^2})} \leq (1 - e^{-\frac{3t^4}{8n}}) e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \frac{3t^4}{8n} e^{-\frac{t^2}{2}} \leq C_1 \frac{|t|}{\sqrt{n}},$$

$$|B_n(t)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^k \frac{|t|^3}{6n\sqrt{n}} \mathbb{E}[|U_{n-k}|^3] = \frac{1}{3} \mathbb{E}[|U_1|^3] \frac{|t|}{\sqrt{n}}.$$

Pour la majoration de $C_n(t)$, on utilise le lemme suivant

Lemme IV.1. *Pour $k \geq \ell \geq 1$ on a $\mathbb{E}[W_k | \mathcal{F}_{\ell-1}] = (Q^{k-\ell}\psi)(X_{\ell-1})$.*

Preuve. On a $W_k = [\check{\xi}(X_k) - Q\check{\xi}(X_{k-1})]^2 - 1$. Le lemme s'établit alors aisément en développant cette expression et en utilisant le fait que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov. \square

D'après (H2) on sait que $C_3 = \sum_{p=0}^{+\infty} \nu(|Q^p\psi|^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} < +\infty$, donc $\sum_{p=0}^{+\infty} \nu(|Q^p\psi|) < +\infty$. Effectuons maintenant sur W_ℓ une réduction en différence de martingale, à savoir $W_\ell = Y_\ell + Z_\ell$ pour $\ell \geq 1$, avec

$$Y_\ell = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\mathbb{E}[W_{p+\ell} | \mathcal{F}_\ell] - \mathbb{E}[W_{p+\ell} | \mathcal{F}_{\ell-1}] \right] \quad \text{et} \quad Z_\ell = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{E}[W_{p+\ell} | \mathcal{F}_{\ell-1}] - \sum_{p=1}^{+\infty} \mathbb{E}[W_{p+\ell} | \mathcal{F}_\ell].$$

Y_ℓ est \mathcal{F}_ℓ -mesurable, et $\mathbb{E}[Y_\ell | \mathcal{F}_{\ell-1}] = 0$. Comme $T_{\ell-1}$ est $\mathcal{F}_{\ell-1}$ -mesurable, on obtient $\mathbb{E}[e^{itT_{\ell-1}} Y_\ell] = \mathbb{E}[e^{itT_{\ell-1}} \mathbb{E}[Y_\ell | \mathcal{F}_{\ell-1}]] = 0$, d'où $\mathbb{E}[e^{itT_{\ell-1}} W_\ell] = \mathbb{E}[e^{itT_{\ell-1}} Z_\ell]$. Par conséquent,

en posant $Z'_\ell = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{E}[W_{p+\ell} | \mathcal{F}_{\ell-1}]$, il vient

$$(E) \quad \mathbb{E}[e^{itT_{\ell-1}} W_\ell] = \mathbb{E}[e^{itT_{\ell-1}} Z'_\ell] - \mathbb{E}[e^{itT_{\ell-1}} Z'_{\ell+1}].$$

On a $Z'_\ell = \sum_{p=0}^{+\infty} (Q^p\psi)(X_{\ell-1})$ (Lemme IV.1), et comme $\sum_{p=0}^{+\infty} \nu(|Q^p\psi|) < +\infty$, il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{itT_{\ell-1}} Z'_\ell] &= \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[e^{itT_{\ell-1}} (Q^p\psi)(X_{\ell-1}) \right] \\ (\text{par stationnarité de } (X_n)_{n \geq 0}) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[e^{it(U_2 + \dots + U_\ell)} (Q^p\psi)(X_\ell) \right] \\ (\text{par le lemme IV.1.}) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[e^{it(T_\ell - U_1)} \mathbb{E}[W_{p+\ell+1} | \mathcal{F}_\ell] \right] = \mathbb{E}[e^{it(T_\ell - U_1)} Z'_{\ell+1}]. \end{aligned}$$

De l'égalité (E) on déduit que

$$|\mathbb{E}[e^{itT_{\ell-1}} W_\ell]| \leq \mathbb{E}[|Z'_{\ell+1}| |e^{it(U_\ell - U_1)} - 1|] \leq |t| \mathbb{E}[|Z'_{\ell+1}|^{\frac{3}{2}}]^{\frac{2}{3}} \mathbb{E}[|U_\ell - U_1|^3]^{\frac{1}{3}}$$

avec $\mathbb{E}[|Z'_\ell|^{\frac{3}{2}}]^{\frac{2}{3}} \leq C_3$, puis par stationnarité $\mathbb{E}[|U_\ell - U_1|^3]^{\frac{1}{3}} \leq 2 \mathbb{E}[|U_1|^3]^{\frac{1}{3}}$. Par conséquent $|\mathbb{E}[e^{i \frac{t}{\sqrt{n}} T_{\ell-1}} W_\ell]| \leq 2 \mathbb{E}[|U_1|^3]^{\frac{1}{3}} C_3 \frac{|t|}{\sqrt{n}}$, et finalement $|C_n(t)| \leq 2 C_3 \mathbb{E}[|U_1|^3]^{\frac{1}{3}} \frac{|t|}{\sqrt{n}}$. \square

IV.2. Un théorème de perturbations

Théorème IV. *Supposons que les conditions (H1) (H3) (H4) soient satisfaites.*

Soit $0 < \tau < 1$. Il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ centré en $t = 0$, et des applications $\lambda(\cdot)$, $v(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ et $N(\cdot)$ à valeurs respectivement dans \mathbb{C} , \mathcal{B} , \mathcal{B}' et $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ tels que l'on ait, pour $t \in J$, $n \geq 1$, et $f \in \mathcal{B}$,

$$(D) \quad Q(t)^n f = \lambda(t)^n \langle \phi(t), f \rangle v(t) + N(t)^n f,$$

avec en outre les propriétés suivantes :

(a) $\langle \phi(t), v(t) \rangle = 1$, $\phi(t)N(t) = 0$, $N(t)v(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) = 1$.

(b) $\langle \nu, v(t) \rangle = 1$, et il existe $C > 0$ et $\rho < 1$ tels que l'on ait pour $t \in J$ et $n \geq 1$

(b1) $\langle \nu, |v(t) - \mathbf{1}| \rangle \leq C |t|^\tau$

(b2) $|\langle \phi(t), \mathbf{1} \rangle - 1| \leq C |t|^\tau$

(b3) $\langle \nu, |N(t)^n \mathbf{1}| \rangle \leq C \rho^n |t|^\tau$.

(c) $\lambda(\cdot)$ est continue sur J .

Preuve. Soit $t \in I$, $n \geq 1$, $f \in \mathcal{B}$. On a $|Q(t)^n f| \leq Q^n |f|$, donc par invariance de ν , $\nu(|Q(t)^n f|) \leq \nu(Q^n |f|) = \nu(|f|)$, puis pour $t_0 \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $t_0 + h \in I$

$$\nu(|Q(t_0 + h)f - Q(t_0)f|) \leq \nu(Q(|e^{ih\xi} - 1| |f|)) = \nu(|e^{ih\xi} - 1| |f|).$$

D'où $\sup\{\nu(|Q(t_0 + h)f - Q(t_0)f|), f \in \mathcal{B}, \|f\| \leq 1\} = O(|h|)$ d'après (H3).

La condition (H4) permet alors d'appliquer le théorème de Keller-Liverani [18] [1] ². Pour les assertions (a) et (b) nous appliquons ce théorème en $t_0 = 0$. Sous la condition (H1), celui-ci assure la décomposition (D) et l'assertion (a). Le point (b) est une conséquence de résultats intermédiaires contenus dans [18] dont nous rappelons les principaux arguments.

Précisons que le réel r de [18] [Th. 1] est choisi ici tel que $\frac{\ln \kappa - \ln r}{\ln \kappa} = \tau$, où κ est le réel de (H4). Soit Γ_1 (resp. Γ_0) un cercle orienté de centre $z = 1$, de rayon suffisamment petit (resp. de centre $z = 0$, de rayon ρ tel que $r < \rho < 1$). D'après [18] [Th. 1], il existe $C > 0$ telle que l'on ait pour $z \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $t \in J$, $f \in \mathcal{B}$,

$$(**) \quad \nu \left(\left| (z - Q(t))^{-1} f - (z - Q)^{-1} f \right| \right) \leq C |t|^\tau \|f\|.$$

Soit $\Pi_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} (z - Q(t))^{-1} dz$. Alors $\Pi_1(t)$ est un projecteur de rang 1 sur le sous-espace propre $\text{Ker}(Q(t) - \lambda(t))$ tel que $\Pi(0)f = \nu(f)\mathbf{1}$, et l'on peut définir

$$v(t) = \langle \nu, \Pi(t)\mathbf{1} \rangle^{-1} \Pi(t)\mathbf{1} \quad \text{et} \quad \phi(t) = \Pi(t)^* \nu,$$

où $\Pi(t)^*$ est l'opérateur adjoint de $\Pi(t)$ (on verra ci-dessous que $\langle \nu, \Pi(t)\mathbf{1} \rangle \neq 0$ pour $|t|$ petit de sorte que $v(t)$ est bien défini). Le premier point de (b) est évident.

On a $\Pi(t)\mathbf{1} - \mathbf{1} = \Pi(t)\mathbf{1} - \Pi(0)\mathbf{1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} [(z - Q(t))^{-1} \mathbf{1} - (z - Q)^{-1} \mathbf{1}] dz$, d'où

$$\nu(|\Pi(t)\mathbf{1} - \mathbf{1}|) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \nu \left(\left| (z - Q(t))^{-1} \mathbf{1} - (z - Q)^{-1} \mathbf{1} \right| \right) dz \leq C |t|^\tau.$$

²Les résultats de [18] sont présentés avec une norme auxiliaire $|\cdot|$ sur \mathcal{B} vérifiant $|\cdot| \leq \|\cdot\|$, mais on peut montrer que ceux-ci subsistent lorsque $|\cdot|$ est remplacée par une semi-norme, en l'occurrence ici $\nu(|\cdot|)$.

On en déduit aisément (b1), ainsi que (b2) grâce à l'égalité $\langle \phi(t), \mathbf{1} \rangle = \langle \nu, \Pi(t)\mathbf{1} \rangle$. Enfin (b3) résulte de l'égalité

$$N(t)^n \mathbf{1} = N(t)^n \mathbf{1} - N(0)^n \mathbf{1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} z^n [(z - Q(t))^{-1} \mathbf{1} - (z - Q)^{-1} \mathbf{1}] dz.$$

Il reste à prouver (c). Soit $t_0 \in J$. Les deux premières majorations établies au début de la preuve et la propriété (H4) montrent que $Q(t)$ vérifie au voisinage de t_0 les conditions du théorème de Keller-Liverani. Ce dernier, adjoint à la décomposition (D) écrite en $t = t_0$, assure que, pour $|h|$ petit, $Q(t_0 + h)$ admet une unique valeur propre dominante $z(t_0 + h)$ qui tend vers $\lambda(t_0)$ quand $h \rightarrow 0$. Mais par unicité on a $z(t_0 + h) = \lambda(t_0 + h)$. \square

En adaptant la preuve de [14] [Lemme 4.2] à l'aide de la majoration du corolaire IV.1, nous allons maintenant préciser le comportement de $\lambda(u)$ quand $u \rightarrow 0$.

Lemme IV.2. *Sous les hypothèses (\mathcal{H}) et $\sigma^2 > 0$, on a $\lambda(u) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}u^2 + O(|u|^{2+\tau})$ pour tout réel $0 < \tau < 1$.*

Si en outre $\langle \nu, |v(u) - \mathbf{1}| \rangle = O(|u|)$, alors $\lambda(u) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}u^2 + O(u^3)$.

Preuve. On suppose pour simplifier que $\sigma^2 = 1$. En utilisant le fait que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov (voir par exemple [12] p. 23), puis le théorème IV, il est facile de voir que, pour tout $f \in \mathcal{B}$, pour toute probabilité initiale $\mu_0 \in \mathcal{B}'$, et pour $t \in J$, $n \geq 1$,

$$(***) \quad \mathbb{E} \left[f(X_n) e^{itS_n} \right] = \langle \mu_0, Q(t)^n f \rangle = \lambda(t)^n \langle \phi(t), f \rangle \langle \mu_0, v(t) \rangle + \langle \mu_0, N(t)^n f \rangle.$$

Dans la suite on considère $t \in [-1, 1]$ et un entier $n \geq N$, avec N assez grand. Pour le moment N est choisi tel que $\frac{t}{\sqrt{n}} \in J$ pour $n \geq N$. La formule $(***)$ appliquée en $\frac{t}{\sqrt{n}}$ avec $f = v(\frac{t}{\sqrt{n}})$ et $\mu_0 = \nu$ montre que

$$\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \mathbb{E} \left[v\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)(X_n) e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}S_n} \right].$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et l'invariance de ν , il vient

$$\begin{aligned} \left| \lambda\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| &\leq \mathbb{E} \left[\left| v\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)(X_n) - 1 \right| \right] + \left| \mathbb{E} \left[e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}S_n} \right] - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \\ &= \langle \nu, |v(\frac{t}{\sqrt{n}}) - \mathbf{1}| \rangle + |\mathbb{E} [e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}S_n}] - e^{-\frac{t^2}{2}}|. \end{aligned}$$

Du corolaire IV.1 et du point (b1) du théorème IV il vient pour $t \in [-1, 1]$ et $n \geq N$,

$$\left| \lambda\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq C \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^\tau.$$

Par ailleurs cette propriété est satisfaite avec $\tau = 1$ si $\langle \nu, |v(u) - \mathbf{1}| \rangle = O(|u|)$.

En utilisant la fonction log complexe définie pour $z \in \mathbb{C}$ non nul par $\log z = \ln |z| + i \arg(z)$, avec $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$, on démontre qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que l'on ait pour $t \in [-1, 1]$ et $n \geq N$, avec N assez grand (voir les détails dans [14] p. 193, la continuité de $\lambda(\cdot)$ sur J est importante pour ce point),

$$(L) \quad \left| n \log \lambda\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \frac{t^2}{2} \right| \leq C' \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^\tau.$$

En observant maintenant que $z - 1 - \log z = (\log z) \alpha(z)$ avec $\alpha(z) = O(|z - 1|)$, on a

$$\begin{aligned} \left| n \left(\lambda \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right) + \frac{t^2}{2} \right| &\leq n \left| \lambda \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - 1 - \log \lambda \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| + \left| n \log \lambda \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) + \frac{t^2}{2} \right| \\ &\leq \left| n \log \lambda \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| \left| \alpha \left(\lambda \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right) \right| + C' \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^\tau \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau (L) et le fait que $|t| \leq 1$, on voit que $|n \log \lambda(\frac{t}{\sqrt{n}})| \leq \frac{1}{2} + C'$.

En outre le corollaire IV.1 montre que la suite $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On déduit alors de [14] [Lemme 4.2] que $\lambda(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Donc $\alpha(\lambda(u)) = O(\lambda(u) - 1) = O(u^2)$. Par conséquent il existe une constante $C'' > 0$ telle que l'on ait pour $t \in [-1, 1]$ et $n \geq N$, avec N assez grand,

$$\left| n \left(\lambda \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right) + \frac{t^2}{2} \right| \leq C'' \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^\tau.$$

En divisant cette inégalité par t^2 pour $\frac{1}{2} \leq |t| \leq 1$, on obtient

$$\left| \left(\frac{t^2}{n} \right)^{-1} \left(\lambda \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right) + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{C''}{t^2} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^\tau \leq 4C'' \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^\tau.$$

Soit $u \in \mathbb{R}^*$, $|u| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$. Il existe clairement $n \geq N$ tel que $\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq |u| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. L'inégalité précédente appliquée avec $t = \sqrt{n}u$ montre que $|\frac{\lambda(u)-1}{u^2} + \frac{1}{2}| \leq 4C'' |u|^\tau$. Ceci démontre le premier point du lemme.

Comme déjà indiqué, si $\langle \nu, |v(u) - \mathbf{1}| \rangle = O(|u|)$, les arguments précédents s'appliquent avec $\tau = 1$. \square

IV.3. Démonstration du théorème I

Supposons pour simplifier que $\sigma^2 = 1$, et rappelons que, en vertu de l'inégalité de Berry-Esseen, une vitesse en $n^{-\frac{\tau}{2}}$ ($\tau < 1$) sera obtenue dans le t.l.c si l'on démontre que, pour un certain $\alpha > 0$, on a

$$A_n = \int_{-\alpha\sqrt{n}}^{\alpha\sqrt{n}} \left| \frac{\mathbb{E}[e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}] - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right| dt = O(n^{-\frac{\tau}{2}}).$$

Pour le moment on choisit $\alpha > 0$ tel que $\frac{\alpha}{\sqrt{n}} \in J$, où J est l'intervalle du théorème IV.

En appliquant la formule $(***)$ du paragraphe IV.2 avec $f = \mathbf{1}$, $\mu_0 = \nu$, et en posant $L(u) = \langle \phi(u), \mathbf{1} \rangle - 1$, on a $\mathbb{E}[e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}] = \lambda(\frac{t}{\sqrt{n}})^n + \lambda(\frac{t}{\sqrt{n}})^n L(\frac{t}{\sqrt{n}}) + \langle \nu, N(\frac{t}{\sqrt{n}})^n \mathbf{1} \rangle$. D'où

$$\begin{aligned} A_n &\leq \int_{-\alpha\sqrt{n}}^{\alpha\sqrt{n}} \left| \frac{\lambda(\frac{t}{\sqrt{n}})^n - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right| dt + \int_{-\alpha\sqrt{n}}^{\alpha\sqrt{n}} \left| \frac{\lambda(\frac{t}{\sqrt{n}})^n L(\frac{t}{\sqrt{n}})}{t} \right| dt + \int_{-\alpha\sqrt{n}}^{\alpha\sqrt{n}} \left| \frac{\langle \nu, N(\frac{t}{\sqrt{n}})^n \mathbf{1} \rangle}{t} \right| dt \\ &= I_n + J_n + K_n. \end{aligned}$$

Du lemme IV.2, on déduit que $|\lambda(u)| \leq 1 - \frac{u^2}{4} \leq e^{-\frac{u^2}{4}}$ pour $|u|$ petit. Par conséquent on a pour $|\frac{t}{\sqrt{n}}| \leq \alpha$, avec α assez petit,

$$|\lambda(\frac{t}{\sqrt{n}})| \leq e^{-\frac{t^2}{4n}}, \text{ d'où } |\lambda(\frac{t}{\sqrt{n}})|^n \leq e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Comme dans la preuve du théorème de Berry-Esseen, on écrit

$$\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - e^{-\frac{t^2}{2}} = \left(\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n-k-1} e^{-\frac{kt^2}{2n}}.$$

Il existe $C, C' > 0$ tels que l'ait pour $\frac{|t|}{\sqrt{n}}$ assez petit, d'une part $|\lambda(\frac{t}{\sqrt{n}}) - e^{-\frac{t^2}{2n}}| \leq C|\frac{t}{\sqrt{n}}|^{2+\tau}$ (lemme IV.2), d'autre part $\sum_{k=0}^{n-1} |\lambda(\frac{t}{\sqrt{n}})|^{n-k-1} e^{-\frac{kt^2}{2n}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{t^2(n-k-1)}{4n} - \frac{kt^2}{4n}} \leq C' n e^{-\frac{t^2}{4}}$, d'où

$$|\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - e^{-\frac{t^2}{2}}| \leq CC' n^{-\frac{\tau}{2}} |t|^{2+\tau} e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

La fonction $t \mapsto t^{1+\tau} e^{-\frac{t^2}{4}}$ étant intégrable sur \mathbb{R} , on a $I_n = O(n^{-\frac{\tau}{2}})$.

En outre, de $|L(\frac{t}{\sqrt{n}})| \leq C|\frac{t}{\sqrt{n}}|^\tau$ (Th. IV(b2)), et de l'intégrabilité de $t \mapsto |t|^{\tau-1} e^{-\frac{t^2}{4}}$, on voit aisément que $J_n = O(n^{-\frac{\tau}{2}})$. Enfin, du point (b3) du théorème IV, du fait que $t \mapsto t^{\tau-1}$ est intégrable sur $[-\alpha, \alpha]$ et que $\rho^n = O(n^{-\frac{\tau}{2}})$, on obtient $K_n = O(n^{-\frac{\tau}{2}})$. \square

IV.4. Démonstration du théorème II

On suppose ici que l'hypothèse $(\tilde{\mathcal{H}})$ est satisfaite et que $\mu_0 \in \mathcal{B}' \cap \tilde{\mathcal{B}}'$, où μ_0 est la loi initiale. L'intégrale A_n est définie comme en IV.3. En appliquant la formule $(***)$ avec $f = \mathbf{1}$, on obtient en posant ici $L(u) = \langle \phi(u), \mathbf{1} \rangle \langle \mu_0, v(u) \rangle - 1$,

$$\begin{aligned} A_n &\leq \int_{-\alpha\sqrt{n}}^{\alpha\sqrt{n}} \left| \frac{\lambda(\frac{t}{\sqrt{n}})^n - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right| dt + \int_{-\alpha\sqrt{n}}^{\alpha\sqrt{n}} \left| \frac{\lambda(\frac{t}{\sqrt{n}})^n L(\frac{t}{\sqrt{n}})}{t} \right| dt + \int_{-\alpha\sqrt{n}}^{\alpha\sqrt{n}} \left| \frac{\langle \mu_0, N(\frac{t}{\sqrt{n}})^n \mathbf{1} \rangle}{t} \right| dt \\ &= I_n + J_n + K_n, \end{aligned}$$

Pour l'étude de I_n , J_n et K_n , on considère des cercles orientés Γ_1 et Γ_0 comme au § IV.2. En utilisant la dernière condition de $(\tilde{\mathcal{H}})$, il est facile de voir (cf. [14] pp. 194) que, pour $f \in \mathcal{B}$, $t \in J$ et $z \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, on a

$$\|(z - Q(t))^{-1}f - (z - Q)^{-1}f\|_{\sim} \leq C|t| \|f\|,$$

avec $C > 0$ indépendante de f , t et z . Par intégration curviligne (voir les définitions de $v(t)$, $\phi(t)$, $N(t)^n$ au § IV.2), on obtient que

$$\|v(u) - \mathbf{1}\|_{\sim} \leq C|u|$$

$$|\langle \phi(u), \mathbf{1} \rangle - 1| \leq C|u| \text{ (utiliser le fait que } \nu \in \tilde{\mathcal{B}}').$$

$$|\langle \mu_0, N(u)^n \mathbf{1} \rangle| \leq C\rho^n |u| \text{ (utiliser le fait que } \mu_0 \in \tilde{\mathcal{B}}').$$

La première inégalité ci-dessus et le fait que $\tilde{\mathcal{B}}$ s'envoie continûment dans $\mathbb{L}^1(\nu)$ montrent que $\langle \nu, |v(u) - \mathbf{1}| \rangle = O(|u|)$. Du lemme IV.2, il vient que $\lambda(u) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}u^2 + O(u^3)$. Les arguments vus au § précédent pour la majoration de I_n s'appliquent alors avec $\tau = 1$. Donc $I_n = O(n^{-\frac{1}{2}})$. En outre, des majorations ci-dessus, on peut déduire que $L(u) = O(|u|)$, et l'on a vu que $|\lambda(\frac{t}{\sqrt{n}})|^n \leq e^{-\frac{t^2}{4}}$ pour $|\frac{t}{\sqrt{n}}|$ assez petit ; on en déduit que $J_n = O(n^{-\frac{1}{2}})$. Enfin on a clairement $K_n = O(\rho^n) = O(n^{-\frac{1}{2}})$. \square

References

- [1] BALADI V. *Positive transfer operators and decay of correlations*. Advanced Series in Nonlinear Dynamics 16, World Scientific.
- [2] BENDA M. *A central limit theorem for contractive stochastic dynamical systems*. J. App. Prob. **35** (1998) 200-205.
- [3] BOLTHAUSEN, E. *The Berry-Esseen theorem for strongly mixing Harris recurrent Markov chains*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiet **60** (1982) 283-289.
- [4] CONZE J-P., RAUGI A. *Convergence of iterates of a transfer operator, application to dynamical systems and to Markov chains*. ESAIM Probability and Statistics 7 (2003) 115-146
- [5] CUNY C. *Un TCL avec vitesse pour la marche aléatoire gauche sur le groupe affine de R^d* . Ann. I. H. Poincaré - PR 39, 3 (2003) 487-503.
- [6] DUFLO M. *Random Iterative Models*. Applications of Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1997).
- [7] FUH, C.D. *Paley-type inequalities related to the central limit theorem for markov chains*. Sankhya : The Indian Journal of Statistics **61** Series A, Pt. 1 (1999) 89-100.
- [8] GORDIN M.I., LIFSIC B.A. *On the central limit theorem for stationary Markov processes*. Soviet Math. Dokl. 19 No 2 (1978) 392-394.
- [9] GUIVARC'H Y., HARDY J. *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 24, No 1, p. 73-98 (1988).
- [10] HENNION H. *Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens*. Proceeding of the A.M.S vol. 118 No 2 (1993) 627-634.
- [11] HENNION H. *Quasi-compactness and absolutely continuous kernels*. I.R.M.A.R, Université de Rennes I.
- [12] HENNION H., HERVÉ L. *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness*. Lecture Notes in Mathematics No 1766, Springer (2001).
- [13] HENNION H., HERVÉ L. *Central limit theorems for iterated random lipschitz mappings*. Annals of Proba. Vol. 32 No. 3A (2004) 1934-1984.
- [14] HERVÉ L. *Théorème local pour chaînes de Markov de probabilité de transition quasi-compacte. Applications aux chaînes V-géométriquement ergodiques et aux modèles itératifs*. Ann. I. H. Poincaré - PR 41 (2005) 179-196.
- [15] HERVÉ L. *Limit theorems for geometrically ergodic chains*. Prépublication (2005) I.R.M.A.R, Université de Rennes I.

- [16] C.T. IONESCU-TULCEA, G. MARINESCU. *Théorème ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues*. Ann. of Maths. 52 1 (1950) 140-147.
- [17] JAN C. *Vitesse de convergence dans le TCL pour des processus associés à des systèmes dynamiques et aux produits de matrices aléatoires*. Thèse de doctorat (2001) I.R.M.A.R, Université de Rennes I.
- [18] KELLER G., LIVERANI C. *Stability of the Spectrum for Transfer Operators*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. (4) Vol. XXVIII (1999) 141-152.
- [19] KONTOYIANNIS, I. AND MEYN, S.P. *Spectral theory and limit theorems for geometrically ergodic Markov processes*. Annals of Applied Probability **13** (2003) 304-362.
- [20] S.P. MEYN AND R.L. TWEEDIE. *Markov chains and stochastic stability*. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1993).
- [21] MILHAUD X., RAUGI A. *Etude de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas d'un processus auto-régressif : convergence, normalité asymptotique, vitesse de convergence*. Ann. Inst. H. Poincaré Vol. 25 No 4 (1989) 383-428.
- [22] NAGAEV S.V. *Some limit theorems for stationary Markov chains*. Theory of probability and its applications 11 4 (1957) 378-406.
- [23] NAGAEV S.V. *More exact statements of limit theorems for homogeneous Markov chains*. Theory of probability and its applications 6 1 (1961) 62-81.
- [24] STEINSALTZ, D. *Convergence of moments in a Markov-chain central limit theorem*. Indagationes Mathematicae **12** (2001) 533-555.